Übungen
Abgabetermin: Freitag, 24.01.2014, 10 Uhr
THEMEN: Testtheorie

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Sollstärke der Rohrwände bei der Röhrenproduktion in einer Fabrik beträgt $\mu_0 = 2,00$ cm. Eine Stichprobe von 10 Rohren aus der Produktion einer Maschine liefert die Messwerte

$$2,12; 2,05; 1,95; 1,96; 2,15; 2,10; 2,01; 2,03; 2,17; 2,12.$$

Man nimmt an, dass die Rohrwandstärke einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung genügt.

(i) Schätzen Sie σ^2 erwartungstreu.

(ii) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0,01$, ob die Maschine neu justiert werden muss, wenn die Maschine eine Produktionsvarianz von $\sigma^2 = 0,006$ cm^2 aufweist.

Lösung zu Aufgabe 1:

(i) Da μ unbekannt ist, schätzen wir zunächst μ:

$$\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

also

$$\hat{\mu} = 2,066.$$

Dann ist

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 2,006)^2 = 0,00603$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2.

(ii) Wir testen μ bei bekanntem $\sigma^2 = 0,006$ cm^2. Die Hypothese ist $H_0 = \{2\}$ gegen die Alternative $H_1 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Um einen Annahmebereich festzulegen, gehen wir vom Maximum-Likelihood-Schätzer aus und bestimmen dann das größte K, so

dass $P_{2,0,006}(|\hat{\mu} - \mu| > K) \leq \alpha = 0,01$.
Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&P_{2,0,006}(|\hat{\mu} - \mu| > K) = 2P_{2,0,006}(\hat{\mu} - \mu > K) \\
=&2P_{2,0,006}\left(\frac{\sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sqrt{0,006}} > \frac{\sqrt{n}K}{\sqrt{0,006}}\right) \\
\overset{(*)}{=}&2\left(1 - \Phi\left(\frac{K \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0,006}}\right)\right) \overset{!}{\leq} 0,01 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{K \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0,006}}\right) \geq 0,995 \\
\Leftrightarrow&\frac{2,58\sqrt{0,006}}{\sqrt{10}} \approx 0,0632 \leq K.
\end{aligned}
$$

$(*)$ gilt, weil $\frac{\sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}{\sqrt{0,006}}$ $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt ist.

In diesem Fall muss die Maschine also neu justiert werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Nach einem Unfall des Lieferwagens spricht ein Elektronikhändler mit dem Lieferanten ab, dass er einen erheblichen Preisnachlass auf die Ladung Energiesparleuchtmittel erhalten soll, wenn der Anteil p an defekten Leuchtmitteln 5% übersteigt. Vereinbarungsgemäß werden der Ladung 40 Energiesparleuchtmittel zufällig entnommen und geprüft; sind darunter mehr als 2 defekte Leuchtmittel, so wird der Preisnachlass gewährt. (Bemerkung: Selbstverständlich werden die Leuchtmittel ohne zurücklegen entnommen, da es sich aber um eine große Lieferung handelt, macht es für die Rechnung keinen wesentlichen Unterschied, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.)

(i) Wir groß ist das Risiko des Lieferanten, den Preisnachlass gewähren zu müssen, obwohl nur 5% der Leuchtmittel defekt sind?

(ii) Wie groß ist das Risiko des Händlers, keinen Preisnachlass zu erhalten, obwohl 10% der Leuchtmittel defekt sind?

(iii) Wie würden Sie den Test wählen, damit der Händler höchstens mit der Wahrscheinlichkeit $0,05$ zu Unrecht einen Preisnachlass erhält?

(iv) Wie würden Sie den Test wählen, damit der Händler mit mindestens der Wahrscheinlichkeit $0,5$ den Preisnachlass erhält, wenn 10% der Energiesparleuchtmittel defekt sind?

Lösung zu Aufgabe 2:

Bezeichne

$X_i = 1$: Das i-te Leuchtmittel ist defekt, $\quad X_i = 0$: Das i-te Leuchtmittel funktioniert,

$1 \leq i \leq 40$. Da wir vereinfachend davon ausgehen können, dass mit Zurücklegen gezogen wird, sind die X_i unabhängig und identisch $B(1,p)$-verteilt, wobei p den Anteil defekter Leuchtmittel in der Gesamtlieferung angibt.

(i) Hier ist nun $p = 0.05$, und gefragt ist nach

$$P_{0.05}(\sum_{i=1}^{40} X_i > 2).$$

Als Summe von iid $B(1, 0.05)$-verteilten Zgr. ist $S_{40} = \sum_{i=1}^{40} X_i$ $B(40, 0.05)$ verteilt. Wir betrachten:

$$\begin{aligned} P_{0.05}(S_{40} \leq 2) =& \binom{40}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^{38} \\ \approx& 0.677 \end{aligned}$$

Somit $P_{0.05}(\sum_{i=1}^{40} X_i > 2) \approx 1 - 0.677 = 0.323$, das Risiko beträgt also ca. 32%.

(ii) Hier ist nach

$$P_{0.1}(S_{40} \leq 2)$$

gefragt, was sich analog zu oben zu 22% berechnet.

(iii) Wir haben nur Methoden kennengelernt, den Fehler 1. Art zu beschränken, d.h. das irrtümliche Verwerfen der Hypothese. Um dies anwenden zu können, setzen wir

$$H_0 : p \leq 0.05, \quad H_1 : p > 0.05.$$

Dann bedeutet irrtümliches Verwerfen der Hypothese, dass wir irrtümlich von einer hohen Anzahl defekter Leuchtmittel ausgehen, der Händler also irrtümlich und damit zu Unrecht einen Preisnachlass erhält.

Nachdem wir so die Testsituation geeignet gewählt haben, lesen wir aus der Aufgabe das Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ab. Außerdem haben wir $p_0 = 0.05$ gesetzt, wir müssen also die kleinstmögliche Schranke Γ bestimmen, so dass

$$P_{0.05}(\hat{p}(X) \geq \Gamma) = P_{0.05}\left(\frac{1}{40} S_{40} \geq \Gamma\right) = P_{0.05}\left(S_{40} \geq \underbrace{40\Gamma}_{\Gamma'}\right) \overset{!}{\leq} 0.05.$$

Hier ist es wieder sinnvoll, das Gegenereignis $P_{0.05}(S_{40} < \Gamma')$ für $\Gamma' \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ zu betrachten, und zu schauen, wann diese Wahrscheinlichkeit zum ersten Mal größer als 0.95 wird. Durch Ausprobieren berechnet sich $\Gamma' = 5$.

Wir akzeptieren H_0, falls $S_{40} < 5$ ($\Leftrightarrow \hat{p} < \frac{5}{40} = \Gamma$) ist, und verwerfen H_0 andernfalls. Mit unserem Test gewähren wir dem Händler also einen Preisnachlass, sobald mehr als 4 Leuchtmittel der Stichprobe defekt sind.

(iv) Lesen wir die Aufgabenstellung “verneint”, so soll die Wahrscheinlichkeit, den Preisnachlass nicht zu gewähren, obwohl 10 % oder mehr der Leuchtmittel defekt sind, höchstens 0.5 betragen.

Setzen wir
$$H_0 : p \geq 0.1, \quad H_1 : p < 0.1,$$
so bedeutet Verwerfen der Hypothese, den Preisnachlass nicht zu gewähren; irrtümliches Verwerfen also, den Preisnachlass nicht zu gewähren, obwohl 10 % oder mehr der Leuchtmittel defekt sind.

In dieser Testsituation fordert die Aufgabenstellung also gerade, dass das Signifikanzniveau (= Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art) $\alpha = 0.5$ sein soll.

Im Gegensatz zu (iii) liegt hier eine linksseitige Hypothese vor, in diesem Fall müssen wir also ein *größt*mögliches Γ wählen, so dass
$$P_{p_0}(\hat{p}(X) \leq \Gamma) = P_{0.1}\left(\frac{1}{40}S_{40} \leq \Gamma\right) = P_{0.1}(S_{40} \leq \Gamma') \overset{!}{\leq} 0.5$$

Durch Ausprobieren berechnen wir $\Gamma' = 3$. Wir akzeptieren H_0, wenn $S_{40} > 3$ ($\Leftrightarrow \hat{p} > \frac{3}{40} = \Gamma$) ist, und verwerfen H_0 sonst. Mit diesem Test gewähren wir dem Händler also ebenfalls genau dann einen Preisnachlass, wenn mehr als 3 Leuchtmittel der Stichprobe defekt sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Füllmenge von Mineralwasserflaschen einer Firma sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit bekanntem $\mu = 1$. Sie sollen testen, ob die Varianz σ^2 größer als der kritische Wert $0,01$ ist. Konstruieren Sie einen Test für die Hypothese $H : \sigma^2 \leq 0,01$ gegen $K : \sigma^2 > 0,01$ zum Niveau $\alpha = 0,05$, wenn Sie 10 Flaschen testen.

Lösung zu Aufabe 3:

X_i gebe die die Füllmenge der i-ten Flasche an. Die X_i, $1 \leq i \leq 10$ werden als unabhängig angenommen.
Wir gehen wieder vom Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\sigma^2}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ aus und konstruieren ein K, so dass
$$P_{1,\sigma^2}(\hat{\sigma^2} > K) \leq 0,05$$
für alle $\sigma^2 \in (0; 0,01]$. Da $P_{1,\sigma^2}(\hat{\sigma^2} > K) \leq P_{1,0,01}(\hat{\sigma^2} > K)$ für alle $\sigma^2 \in (0; 0,01]$, suchen

wir das größte K, so dass $P_{1;0,01}(\hat{\sigma^2} > K) \leq 0,05$ ist.

$$\begin{aligned} P_{1;0,01}(\hat{\sigma^2} > K) =& P_{1;0,01}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 > K\right) \\ =& P_{1;0,01}\left(\frac{n}{0,01}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 > \frac{n}{0,01}K\right) \\ =& P_{1;0,01}\left(\sum_{i=1}^{10}\frac{(X_i-1)^2}{0,01} > \frac{10}{0,01}K\right) \\ =& 1 - F_{\chi^2_{10}}(1000K) \stackrel{!}{\leq} 0,05 \Leftrightarrow 1000K \geq 18,31 \Leftrightarrow K \geq 0,01831 \end{aligned}$$

Wir verwerfen die Hypothese, wenn $\hat{\sigma^2} > 0,01831$.
Dargestellt sind die Werte $F_{\chi^2_r}(y) = x$ (z.b. $F_{\chi^2_1}(7,879) = 0.995$).

$\downarrow r, \rightarrow x$	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050
1	7,879	6,635	5,024	3,841	2,706	1,323	0,455	0,102	0,016	0,004
2	10,60	9,210	7,378	5,991	4,605	2,773	1,386	0,575	0,211	0,103
3	12,84	11,34	9,348	7,815	6,251	4,108	2,366	1,213	0,584	0,352
4	14,86	13,28	11,14	9,488	7,779	5,385	3,357	1,923	1,064	0,711
5	16,75	15,09	12,83	11,07	9,236	6,626	4,352	2,674	1,610	1,145
6	18,55	16,81	14,45	12,59	10,64	7,841	5,348	3,455	2,204	1,635
7	20,28	18,48	16,01	14,07	12,07	9,037	6,346	4,254	2,833	2,168
8	21,95	20,09	17,53	15,51	13,36	10,22	7,344	5,071	3,490	2,733
9	23,59	21,67	19,02	16,92	14,86	11,39	8,343	5,898	4,168	3,325
10	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	12,55	9,342	6,737	4,865	3,940